



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A XI-a

Soluții și bareme de corectare

SUBIECTUL I (40 puncte)

Subiect	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspuns corect	C	E	B	D	E	E	D	C	B	A
	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $E = A^{2026} + B^{2026}$.

a) Arătați că $AB = BA$.

b) Calculați $\det E$.

Soluție.

a) $AB = O_3$ 3p

$BA = O_3$, deci $AB = BA$ 3p

b) $AB = BA = O_3 \Rightarrow A^k B^p = B^p A^k = O_3$, pentru orice numere naturale k și p 5p

Atunci $(A + B)^{2026} = A^{2026} + C_{2026}^1 A^{2025} B + \dots + C_{2026}^1 A B^{2025} + B^{2026} = A^{2026} + B^{2026}$ 5p

Obținem $\det E = \det((A + B)^{2026}) = (\det(A + B))^{2026}$ și, cum $\det(A + B) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -36$, rezultă că

$\det E = (-36)^{2026} = 6^{4052}$ 9p

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Șirurile de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ au proprietatea că

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9 / 2025

Soluție.

a) Avem $(1 + \sqrt{2})^n = (C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \dots) + \sqrt{2}(C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + \dots)$ 6p

Cum $a_n + b_n \sqrt{2} = (C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \dots) + \sqrt{2}(C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + \dots)$ și $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, iar $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, rezultă că

$a_n = C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \dots$ și $b_n = C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + \dots$ 6p



Deducem că $(1 - \sqrt{2})^n = (C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \dots) - \sqrt{2}(C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + \dots) = a_n - b_n\sqrt{2}$, iar din relațiile

$a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ și $a_n - b_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n$ obținem

$$a_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right) \quad \text{și} \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right)$$

..... 8p

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n} = \sqrt{2}$

5p